

lekül aromatisch. Für Benzol war früher² $\epsilon_M = 6$ ermittelt worden, aber weder dieser Wert und noch viel weniger der von Aceton lassen eine Deutung dieser hohen KERR-Konstanten zu. Man müßte dazu ϵ_M größer ansetzen: Für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit dem elektrischen Moment senkrecht zur Rotationsachse würde dabei ein Wert von 6,6 auf eine optische Anisotropie von $\delta = 0,28$ führen, wie sie für Toluol, *m*- und *p*-Xylol gefunden worden ist¹⁰ und deshalb wohl auch hier ungefähr erwartet werden kann. Eine ausführlichere Diskussion ist leider nicht möglich, da keine Messungen am Gas vorliegen.

Beim unpolaren *p*-Xylol ergibt sich aus Gas- und Flüssigkeitsmessung² $\epsilon_M = 7,5$. Dieser gegenüber Benzol erhöhte Wert wurde seinerzeit als Zeichen angesehen, daß das bisher benutzte Modell mit reiner Formanisotropie der Molekel den KERR-Effekt für aromatische Moleküle mit Substituenten nicht mehr richtig wiederzugeben vermag. Für Acetophenon läßt sich das wegen der geringen Erhöhung von ϵ_M nicht mit dieser Sicherheit aussagen.

Nachdem durch diese Impulsmessungen die Ketone mit größerer Leitfähigkeit zugänglich sind,

zeigt die Diskussion, daß sich außer den Paraffinen und den bisher im Dauerbetrieb gemessenen Ketonen auch Aceton und Cyclohexanon gut durch das einfache Modell darstellen lassen. Bei flexiblen Molekülen wie Diäthylketon könnten die molaren KERR-Konstanten in Gas und Flüssigkeit wirklich verschieden sein, verursacht durch Änderung der mittleren Form. Für diese Fragestellung gewinnen aber zunächst die Untersuchungen an Substanzen mit starreren Molekülen erhöhte Bedeutung, da durch sie ermittelt werden muß, wieweit sich die Modellvorstellungen bewähren, auf denen die Auswertung der Messungen basiert. Das gilt auch für aromatische Verbindungen, bei denen eine Eigenanisotropie der „Molekülmaterie“ nicht von vornherein auszuschließen ist.

Die experimentellen Untersuchungen wurden durch Mittel der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt, wofür wir auch an dieser Stelle herzlich danken. Ebenso haben wir Herrn Prof. Dr. H. KLUMB für die Zurverfügungstellung von Institutsmitteln Dank zu sagen.

⁶ G. OTTERBEIN, Phys. Z. **35**, 249 [1934].

⁷ G. BRIEGLB, Z. Phys. Chem. (B) **14**, 97 [1931].

⁸ G. BRIEGLB, Z. Phys. Chem. (B) **16**, 249 [1932].

Ambipolare Effusion aus der positiven Säule

Von M. PAHL

Aus der Forschungsstelle für Spektroskopie in der Max-Planck-Gesellschaft Hechingen

(Z. Naturforschg. **12 a**, 632—642 [1957]; eingegangen am 23. März 1957)

Durch eine ideale Kreislochblende in der nichtleitenden Wand eines Entladungsgefäßes effundieren die Ladungsträger aus der stationären positiven Säule ambipolar zusammen mit dem neutralen Gas in ein anschließendes Hochvakuum. Im Hinblick auf die massenspektrometrische Analyse der Ladungsträger wird versucht, theoretisch die Frage zu klären, inwieweit die Messung der Effusionsströme verschiedener Ionenarten eine Aussage über die relativen Trägerkonzentrationen im Plasma erlaubt. Ausgehend von der SCHÖTKYSCHEN Theorie der positiven Säule und ihrer Erweiterung von SPENKE um die „quadratische“ Ionisierung werden zunächst Gleichungen für den Betrag des Effusionsstromes abgeleitet, die experimentell geprüft werden können. Sodann wird die Diffusionstheorie erweitert durch Einbezug der quadratischen Volumen-Rekombination und endlicher Trägerdichten vor der Wand.

Die theoretisch möglichen Trägerdichteveerteilungen ergeben sich aus den Lösungen der Differentialgleichung (13)

$$D[n''(r) + 1/r \cdot n'(r)] + \eta n(r) + (\varkappa - \alpha) n^2(r) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $n(0) = n_0$ und $n'(0) = 0$ sowie verschiedenen — als experimentell bestimmbar angesehenen — Randwerten $n(R)/n_0$. Für die Wand(Effusions)-Stromdichten werden, ausgehend von der gewonnenen Dichteveerteilungsfunktion, auf zwei Wegen äquivalente Gleichungen [(27) und (30)] abgeleitet. Zuletzt werden noch einige Effekte an der nichtidealen Lochblende diskutiert, die Abweichungen von der Theorie hervorrufen können.

Die Extraktion von Ionen aus einem Plasma ist wegen ihrer Bedeutung für die Konstruktion von Ionenquellen bereits mehrfach näher untersucht wor-

den¹. Wir haben selbst vor einiger Zeit die Eignung der Hohlkathode als Ionenquelle für massenspektrometrische Zwecke festgestellt² und dabei gefunden,

¹ Siehe D. KAMKE, Handbuch der Physik **33**, 47 [1956], Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

² M. PAHL u. W. KLEINMANN, Ann. Phys., Lpz. **13**, 165 [1953].



daß der Ionenstrom, welcher durch eine metallische Lochblende aus dem Plasma austritt, mit abnehmendem Gasdruck sowie mit zunehmendem Entladungsstrom ansteigt. Die Energiebreite der Ionenbündel (aus H₂, N₂ oder Ne) ist dann am schmalsten (≈ 3 eV), wenn die Lochblende auf Plasmapotential liegt. Alle bisherigen Ergebnisse zeigen, daß für die Extraktion durch eine metallische Blende der Mechanismus der Ionen-Diffusion wesentlich mitbestimmend ist.

Soweit uns bekannt, sind bisher bei der Ionenextraktion nur elektrisch leitende „Ziehblenden“ verwendet worden. Im Zuge eigener Versuche, die in der positiven Säule einer Gleichstromentladung auftretenden Ionen mit einem Massenspektrometer zu analysieren, haben wir eine andere Methode zur Gewinnung von Ionenströmen verfolgt. Hierbei treten Ionen und Elektronen mit annähernd gleicher Stromstärke durch ein kleines Loch in der an dieser Stelle möglichst dünnen Glaswand des Entladungsrohres und werden erst im anschließenden Hochvakuum durch elektrische Felder abgezogen und gebündelt. Damit behält die Blende konstantes Potential bezogen auf das Plasma. Ferner ist insbesondere zu erwarten, daß Niederschläge aus Entladungen in Dämpfen weniger stören als bei Verwendung metallischer Blenden.

Da hierbei die Ladungsträger in erster Linie von Kräften im Innern des Niederdruck-Plasmas durch die Lochblende getrieben werden, haben wir für diesen Mechanismus die Bezeichnung „Ambipolare Effusion der Ladungsträger“ gewählt. In dieser Arbeit werden theoretische Überlegungen und Rechnungen mitgeteilt als Versuch zur Klärung der Frage, inwieweit die massenspektrometrische Analyse von Effusionsströmen Aussagen über die relativen Ionenkonzentrationen im Plasma der positiven Säule erlaubt. Über experimentelle Untersuchungen wird demnächst gesondert berichtet werden.

1. Ambipolare Effusion nach der Theorie von Schottky

Symbolen und Bezeichnungen

a	: Radius der Kreis-Lochblende in cm,
b_{\pm}	: Träger-Beweglichkeit,
D	: Koeffizient der ambipolaren Diffusion,
e	: Elementarladung, $1,601 \cdot 10^{-19}$ COULOMB,
E_z	: Elektrische Feldstärke in Achsenrichtung,
I	: Entladungsstrom durch die Röhre,
j_a	: Dichte des ambipolaren Wandstromes in A/cm ² ,

J_0	: BESSEL-Funktion 0-ter Ordnung,
k	: BOLTZMANN-Konstante, $1,38 \cdot 10^{-23}$ Joule/Grad,
M	: Ionenmasse,
n	: Numerische Dichte der Ladungsträger (n_0 : in der Rohrachse),
$N(p)$: Gesamte Trägerzahl pro cm Rohrlänge,
p	: Gasdruck der Neutralen in Torr,
r	: Radialer Abstand von der Rohrachse,
R	: Rohrradius,
T_0	: Gas-Temperatur,
T_{\pm}	: Träger-Temperatur,
u_{\pm}	: Drift-Geschwindigkeit,
\bar{v}_{\pm}	: Mittlere ungeordnete Geschwindigkeit der Träger,
η	: Zahl der Ionisationen/sec Elektron,
λ_{\pm}	: Mittlere freie Weglänge der Träger (ohne Index der Neutralen).

Von allen Vorgängen in einer Niederdruck-Entladung ist der Mechanismus der ambipolaren Diffusion (AD) in der positiven Säule noch am ehesten einer quantitativen Beschreibung zugänglich. Es liegt deshalb nahe, die Effusion von Ladungsträgern durch eine ideale Lochblende in der Glaswand als ambipolare Diffusionsstrom aufzufassen. Dann müssen im einfachsten Falle die Voraussetzungen der SCHOTTKYSchen Theorie³ erfüllt sein:

1. *Quasineutralität*, $n_+ - n_- \ll n$. Diese Forderung enthält die Bedingung $\lambda \ll R$ und beschränkt die Entladungsstromdichte auf einen bestimmten, angebbaren Bereich.

2. Keine merkliche Volumen-Rekombination, Trägerverluste nur auf der Wand.

3. Keine merkliche Stufen-Ionisation.

4. $T_- = \text{const}$ für alle r .

5. $T_0 \approx T_+ \ll T_-$.

6. Keine negativen Ionen im Plasma.

Nach SCHOTTKY gilt für die ambipolare Stromdichte auf die Wand

$$j_a = -e D \left(\frac{dn}{dr} \right)_R \text{ (in Amp/cm}^2\text{)} . \quad (1)$$

Nach Multiplikation mit πa^2 gibt Gl. (1) den außerhalb des Entladungsrohres hinter dem Loch gesammelten Ionen- bzw. gleich großen Elektronenstrom an.

Die Dichteverteilung $n(r)$ ist gegeben als

$$n(r) = n_0 J_0(r\sqrt{\eta/D}) . \quad (2)$$

Zur Eliminierung von n_0 dienen die bekannten Ansätze

$$N = 2 \pi n_0 \int_0^R r J_0(r\sqrt{\eta/D}) dr \quad (3)$$

³ W. SCHOTTKY, Phys. Z. 25, 635 [1924].

sowie

$$I = e N b_- E_z = e N u_- \quad (4)$$

$(b_+ \ll b_-, u_-$ in Achsenrichtung).

Mit $\sqrt{\eta/D} = 2,405/R$ (1. Nullstelle von J_0) folgt dann aus (2), (3) und (4)

$$\left(\frac{dn}{dr} \right)_R = \frac{(2,405)^2 I}{2 \pi e R^3 u_-}. \quad (5)$$

Wegen Voraussetzung 5 gilt ferner

$$D = \frac{k}{e} b_+ T_- \quad (6)$$

und man erhält:

$$j_a = 2,89 \frac{I}{\pi R^3} \frac{k}{e} \frac{b_+}{u_-} T_- \quad (\text{in Amp/cm}^2) \quad (7)$$

bei Anwesenheit einer einzigen positiven Ionensorte.

Die bekannte Schwierigkeit, daß für $n(R)=0$ ein unendlich hohes negatives Potential der Wand folgt, ist außer Acht gelassen, da in die Rechnung nur der Dichtegradient bei R eingeht. Man kann zwar direkt auf der Wand völlige Rekombination annehmen, nicht hingegen für die Lochfläche. Letztere würde genauer genommen im Loch $(dn/dr)_R$ kleiner ergeben als an der Wand. Es sollte jedoch kein allzu starker Unterschied des Dichtegradienten bestehen, solange der Lochdurchmesser $2a \ll R$ bleibt, da für den Wandstrom ja die Vorgänge im ganzen Plasmaraum bestimmt sind. Die Berücksichtigung dessen bedeutet aber immerhin, daß Gl. (7) nur einen oberen Wert für j_a liefert wegen des Faktors $1/R^3$, der bei exakterer Behandlung durch $1/R^3 < 1/R^3$ ersetzt werden müßte, wobei $R' > R$ einen fiktiven Radius darstellt, für den erst $n(R')=0$. Näheres hierzu siehe Abschnitt 2 B.

Der Einfluß von Stufenprozessen („quadratische Ionisierungsprozesse“) wirkt sich nach den Rechnungen von SPENKE⁴ nur geringfügig auf den Dichtegradienten bei $r=R$ aus. Daraus folgt, daß Stufenprozesse beim Fehlen jeglicher Volumen-Rekombination nur eine Senkung der Elektronentemperatur und damit eine entsprechende Änderung von u_- hervorrufen können. Der Einfluß der Volumen-Rekombination wird in Abschnitt 2 behandelt.

Der Gl. (7) liegt – außer den Bedingungen der AD – noch die Voraussetzung zugrunde, daß im Plasma nur eine einzige positive Ionensorte vorkommt (etwa He^+ in He), deren Beweglichkeit den Wert von D gemäß Gl. (6) bestimmt. Diese Voraussetzung trifft aber nur selten zu. Selbst in Edelgasentladungen können Molekül-Ionen (He_2^+ , A_2^+ usf.) auftreten⁵, die eine andere Beweglichkeit als die Atom-Ionen besitzen.

Zur Berechnung der erzielbaren Ionenstromdichte nach Gl. (7) muß deshalb die Größe b_+ als Mittelwert aus den Beweglichkeiten aller vorkommenden Ionen angegeben werden. Bezeichnet man die relativen Konzentrationen der positiven Träger mit $c_i = N_i/N$, so gilt

$$\bar{b}_+ = \sum_i c_i b_i^+, \quad (8)$$

und bei Anwesenheit mehrerer positiver Ionenarten entsteht aus (7)

$$j_a = 2,89 \frac{I}{\pi R^3} \frac{k T_-}{e u_-} \sum_i c_i b_i^+. \quad (9)$$

Dies folgt aus der Quasineutralität und aus der Annahme

$$\frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dr} = \frac{1}{n_k} \frac{dn_k}{dr} = \frac{1}{n_-} \frac{dn_-}{dr}, \quad (10)$$

d. h. gleicher Verteilung aller Trägersorten.

Für die Bestimmung von relativen Ionenkonzentrationen in der positiven Säule durch Messung der Effusionsströme mit dem Massenspektrometer folgt aus Gl. (9) die schon von anderen Autoren⁶ angegebene Beziehung

$$\frac{c_i}{c_k} = \frac{j_i}{j_k} \frac{b_k^+}{b_i^+}. \quad (11)$$

Falls – etwa bei Isotopen mit kleinem $\Delta M/M - \lambda_i^+ \approx \lambda_k^+$ gesetzt werden kann, ergibt sich aus (11) mit Hilfe von $b^+ = e \lambda_+/M \bar{v}$ und $\bar{v}_i = \sqrt{8 k T_i^+ / \pi M_i}$ (was im Innern des Plasmas erfüllt sein dürfte)

$$\frac{c_i}{c_k} = \frac{j_i}{j_k} \sqrt{\frac{M_i}{M_k}}. \quad (12)$$

2. Erweiterung der Diffusionstheorie von Schottky-Spenke durch Einbeziehung der Volumen-Rekombination (VR)

Weitere Symbole und Bezeichnungen

α	: Volumen-Rekombinationskoeffizient,
α	: Proportionalitätsfaktor für „quadratische“ Stufenprozesse (SP),
$\tau = \frac{1}{\eta}$: mittlere Lebensdauer der Träger zwischen zwei einfachen Ionisierungen,
$\varrho = r \sqrt{\frac{\eta}{D}}$: dimensionsloses Maß für r ,
$\nu(\varrho) = \frac{n}{n_0}$: relative Trägerdichte,

⁴ E. SPENKE, Z. Phys. **127**, 221 [1950]. — ⁵ D. R. BATES, Phys. Rev. **77**, 718 [1950]. — A. V. PHELPS u. S. C. BROWN, Phys. Rev. **86**, 102 [1952].

⁶ E. SPENKE, Z. Phys. **127**, 221 [1950].

⁶ A. V. PHELPS u. S. C. BROWN, l. c.⁵.

$s = \frac{\alpha n_0}{\eta}$: Verhältnis Stufen-Ionisierung in der Rohrachse,

$q = \frac{\alpha n_0}{\eta + \alpha n_0}$: Verhältnis Verluste durch Vol.-Rekomb. Gesamte Ionisation in der Achse,

$\gamma = \frac{(\alpha - \alpha) n_0}{\eta} = s(1 - q) - q$: resultierender Faktor aus SP und VR in der Achse,

$-\Phi(\gamma, \nu_R) = \frac{\pi e u_- R^3}{I} \left(\frac{dn}{dr} \right)_R$: dimensionsloses Maß für den Dichtegradienten bei $r=R$,

m, μ : Laufzahlen,

$c_m : \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$ Koeffizienten von Polynomen.

Die Trägerdichte-Verteilung für den Fall, daß außer einfacher Ionisierung noch Stufenprozesse ($\sim n^2$) auftreten, hat SPENKE⁴ in einer — gegenüber dem SCHOTTKYSCHEN Ansatz — erweiterten Theorie abgeleitet. Er findet, daß selbst beim Überwiegen der SP die Dichte-Verteilung kaum meßbar von der BESEL-Funktion J_0 abweicht. SP erniedrigen nur die Elektronen-Temperatur und damit den Längsgradienten E_z .

Den weiteren Einfluß der Volumen-Rekombination, soweit er ebenfalls durch ein quadratisches Glied erfaßt werden kann, hat SEELIGER⁷ diskutiert unter Bezugnahme auf die Ansätze und Rechenverfahren von SPENKE. VR bewirkt eine Erhöhung der Elektronen-Temperatur und aus dem Widerspiel von SP und VR ist nach SEELIGER die weite Gültigkeit der einfachen SCHOTTKYSCHEN Theorie zu verstehen.

Die Methode von SPENKE beruht auf 2 Näherungsverfahren für kleinen bzw. sehr großen Anteil an SPn, wobei die Ergebnisse auf gleiches T_- bezogen sind. Im folgenden wird eine Lösung der vollständigen Differentialgleichung für die zylinder-symmetrische Form der positiven Säule abgeleitet, die zu weitergehenden Aussagen über die DichteVerteilung und die Effusionsströme führt.

Setzt man die Ionenerzeugung durch quadratische $SP = \alpha n^2$ und die Verluste durch $VR = \alpha n^2$, so entsteht die nichtlineare Differential-Gleichung der um SP und VR erweiterten Diffusions-Theorie

$$D[n''(r) + 1/r \cdot n'(r)] + \eta n(r) + (\alpha - \alpha) n^2(r) = 0. \quad (13)$$

(Zur Aufstellung dieser Gleichung s. bei SPENKE, l. c.⁴, und SEELIGER, l. c.⁷.)

Einführen der dimensionslosen Größen

$$\nu(\varrho) = \frac{n(r)}{n_0}, \quad (14) \quad \varrho = r \sqrt{\eta/D}, \quad (15)$$

wandelt (13) um in

$$\nu''(\varrho) + 1/\varrho \cdot \nu'(\varrho) + \nu(\varrho) + \gamma \nu^2(\varrho) = 0 \quad (16)$$

$$\text{mit } \gamma = n_0(\alpha - \alpha)/\eta.$$

Definiert man weiterhin wie SPENKE

$$s = \frac{\alpha n_0^2}{\eta n_0} = \frac{\alpha n_0}{\eta} \quad (17)$$

als das Verhältnis $\frac{\text{einf. Ionis.}}{\text{SP-Ionis.}}$ und wie SEELIGER

$$q = \frac{\alpha n_0^2}{\eta n_0 + \alpha n_0^2} = \frac{\alpha n_0}{\eta + \alpha n_0} \quad (18)$$

als das Verhältnis $\frac{\text{VR-Verluste}}{\text{gesamte Ionis.}}$ in der Säulenachse, so wird der dimensionslose Faktor γ , der letztlich eine Funktion von T_- und I darstellt,

$$\gamma = n_0(\alpha - \alpha)/\eta = s(1 - q) - q \begin{cases} 0 \leq s \leq \infty \\ 0 \leq q \leq 1 \end{cases}. \quad (19)$$

γ läßt sich wegen der Existenz des linearen Gliedes in Gl. (16) nicht durch Einführen einer neuen Variablen eliminieren, sondern geht in die Lösung als Parameter ein. Aus (19) sind die möglichen Zuordnungen von q und s für feste Werte von γ zu entnehmen.

Für die Lösungen $\nu(\varrho, \gamma)$ von (16) sind aus physikalischen Gründen folgende zwei *Anfangsbedingungen* zu fordern:

$$\nu(0) = \nu_0 = 1, \quad (20')$$

$$\nu'(0) = 0. \quad (20'')$$

Die Lösungen müssen also symmetrisch sein in ϱ .

Sie werden nun zunächst mit den Anfangsbedingungen (20') und (20'') angegeben und erst im Anschluß daran verschiedene Randbedingungen für die Wand des Entladungsrohres gewählt.

Eine geschlossene Lösung von Gl. (16) ist nicht bekannt, jedoch gelingt ein Potenzreihenansatz

$$\nu(\varrho, \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\gamma) \varrho^m. \quad (21)$$

Dieser erfüllt sicher die Bedingung (20''), wenn $c_1 \equiv 0$. Aus (20') folgt:

$$c_0 = \nu_0 = 1,$$

⁷ R. SEELIGER, Z. Naturforschg. 8a, 74 [1953].

das erste Glied c_0 der Potenzreihe hängt also nicht von γ ab.

Für die $c_m(\gamma)$ ergibt sich aus (21) und (16) die Rekursionsformel

$$c_{m+2} = - \frac{c_m + \gamma \sum_{\mu=0}^m c_\mu c_{m-\mu}}{(m+2)^2}, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (22 \text{ a})$$

Die Koeffizienten $c_{m>0}$ enthalten im Zähler Polynome von γ . Ihre Form lautet:

$$c_m = \pm \frac{1 + \sum_{\mu=1}^{m/2} a_{m,\mu} \gamma^\mu}{(2\mu!)^2} \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}m \quad (22 \text{ b})$$

(+ -Zeichen für $m = 4\mu$, - -Zeichen für $m = 4\mu - 2$). Aus (22 a) entnimmt man leicht:

1. wenn $c_1 \equiv 0$, sind alle ungeraden Koeffizienten $c_{2\mu-1} \equiv 0$,
2. für $\gamma = 0$ resultiert die Reihe der BESSEL-Funktion J_0 ,
3. für $\gamma = -1$ werden alle $c_{m>0} \equiv 0$,
d. h. $v(\varrho, -1) = v_0 = 1$ für beliebiges ϱ ,

4. für $\gamma = -\frac{1}{2}$ werden alle $c \equiv 0$,

5. für $\gamma \leq -1$ existiert im untersuchten Bereich kein Wendepunkt.

In Tab. 1 sind die nach (22 a) berechneten $c_m(\gamma)$ bis $m = 18$ angegeben. Eine einfache Regel für die Bildung der $a_{m,\mu}$ ist nicht ableitbar.

Im Bereich $-\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 10$ konvergiert die Reihe (21) mit $m \leq 18$ ausreichend bis zur ersten Nullstelle mit einer Genauigkeit von 2–3%, für $\gamma > 10$ und $-\frac{1}{2} > \gamma > -1$ ist die Konvergenz schlechter, für $\gamma < -1,5$ wieder besser. Für eine genauere Berechnung als hier durchgeführt müßten noch höhere Glieder hinzugenommen werden.

Abb. 1 zeigt eine Anzahl berechneter Funktionen $v(\varrho, \gamma)$. Wie bei der SPENKESCHEN Verteilung ist auch hier die Nullstelle $\varrho_0(\gamma)$ Funktion eines Parameters γ , der im vorliegenden Falle die Anteile an SP und VR enthält. Bemerkenswert erscheint die Eigenschaft, daß ϱ_0 nur langsam ansteigt, wenn $\gamma \rightarrow -1$. Der Fall $v(\varrho, -1) = v_0$ entspricht der „idealen“ VR, d. h. idealer „Reflexion“ der Träger an der Wand.

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_2 &= -\frac{1+\gamma}{4}, \\ c_4 &= +\frac{1+3\gamma+2\gamma^2}{(2\cdot 4)^2}, \\ c_6 &= -\frac{1+9\gamma+16\gamma^2+8\gamma^3}{(2\cdot 4\cdot 6)^2}, \\ c_8 &= +\frac{1+29\gamma+106\gamma^2+130\gamma^3+52\gamma^4}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8)^2}, \\ c_{10} &= -\frac{1+99\gamma+700\gamma^2+1610\gamma^3+1512\gamma^4+504\gamma^5}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10)^2}, \\ c_{12} &= +\frac{1+351\gamma+4798\gamma^2+18760\gamma^3+31332\gamma^4+23828\gamma^5+6808\gamma^6}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12)^2}, \\ c_{14} &= -\frac{1+1275\gamma+34300\gamma^2+218834\gamma^3+584472\gamma^4+765576\gamma^5+489216\gamma^6+122304\gamma^7}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14)^2}, \\ c_{16} &= +\frac{1+4707\gamma+254410\gamma^2+2611504\gamma^3+10589880\gamma^4+21389480\gamma^5+23031568\gamma^6}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16)^2} \\ &\quad + \frac{12690216\gamma^7+2820048\gamma^8}{(\dots)^2}, \\ c_{18} &= -\frac{1+17577\gamma+1943800\gamma^2+32090232\gamma^3+192295992\gamma^4}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18)^2} \\ &\quad + \frac{565904920\gamma^5+917218848\gamma^6+838178712\gamma^7+405916000\gamma^8+81183200\gamma^9}{(\dots)^2}. \end{aligned}$$

Tab. 1. Nach (22 a) berechnete Werte der Koeffizienten $c_m(\gamma)$ der Potenzreihe (21).

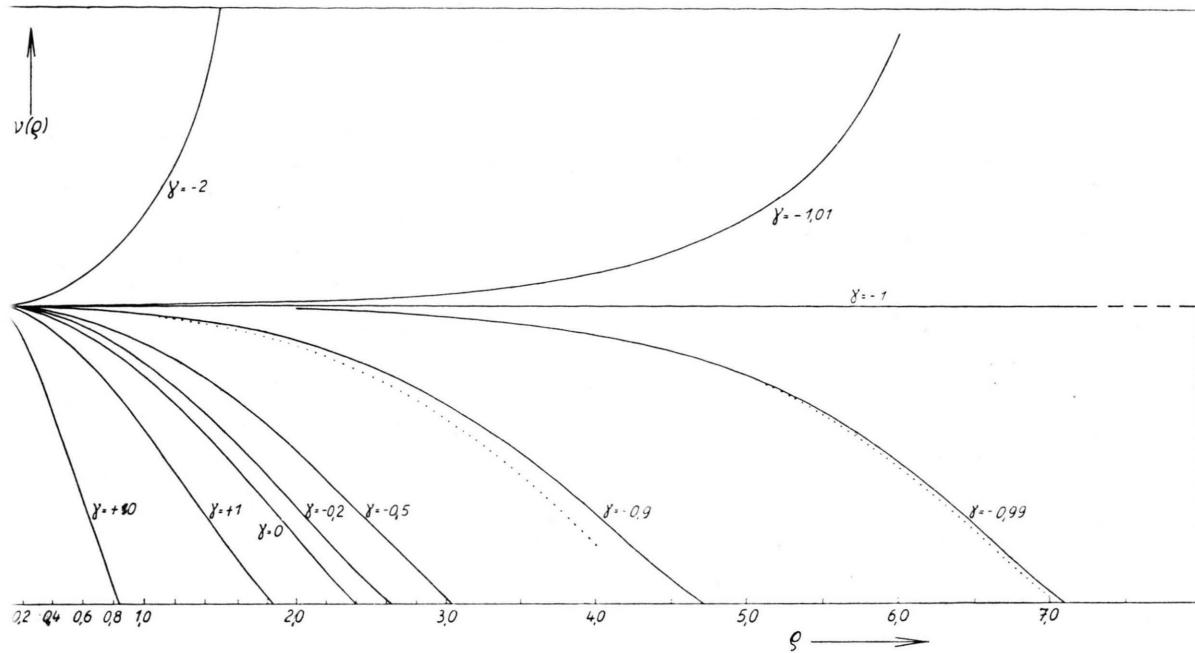


Abb. 1. Berechnete Lösungsbeispiele der Differentialgleichung $v''(q) + 1/q \cdot v'(q) + v(q) + \gamma v^2(q) = 0$ mit den Anfangsbedingungen $v(0) = v_0$ und $v'(0) = 0$. γ im Bereich $+10 \geq \gamma \geq -2$.

Punktierte Kurven: $v(\xi)$, $\xi = r\sqrt{(\alpha - \nu)/D}$.

Die Wahl einer unabhängigen Variablen ξ ist nur durch den Zweck der praktischen Lösung einer, der Gl. (13) äquivalenten, dimensionslosen Differential-Gleichung bestimmt. Es hat sich gezeigt, daß man mit $\xi = q = r\sqrt{\eta/D}$ alle in Frage kommenden Lösungen mit beliebigem γ erhält, während bei anderer Wahl von ξ gewisse Wertebereiche von γ keine Lösungen mit praktisch genügender Konvergenz zulassen. Setzt man etwa

$$\xi = r \sqrt{\frac{(\alpha - \nu)}{D}},$$

so wird $\xi/q = \sqrt{-\gamma}$. Wie die Rechnung zeigt, ist $v(\xi) \approx v(q)$ für $\gamma = -0,99$ bereits sehr genau erfüllt (punktierter Kurve in Abb. 1), jedoch versagt dieser Ansatz für $\gamma \rightarrow 0$.

Physikalisch interessiert nun allein die transformierte Funktion $v(q/\varrho_R) = v(r/R)$, die bei festem Randwert v_R nur von γ abhängt. Abb. 2 zeigt einige Verteilungen der Relativdichte $v(r/R)$ mit verschiedenen angenommenen Randwerten v_R , die aus den berechneten Funktionen $v(q)$ in Abb. 1 gewonnen sind. Die von SPENKE mit $v_R = 0$ für $q = 0$ und $s \rightarrow \infty$ berechnete Verteilung ist als Kurve $\gamma = \infty$ mit eingezeichnet, $v_R = 0$, $\gamma = 0$ entspricht dem SCHOTTKY-Fall. Man erkennt, daß nur negative γ -Werte eine erhebliche Abweichung von der BESSEL-Verteilung bewirken, und zwar um so empfindlicher, je näher

$\gamma \rightarrow -1$ geht. Die Randbedingung $v_R = 0$ oder $v_R \ll v_0$ ist demnach für alle $\gamma > 0$ gerechtfertigt, während $\gamma < 0$ physikalisch eine Randbedingung $v_R > 0$ erfordert, da sonst $v_R' \rightarrow \infty$ streben würde. Im folgenden werden die Lösungen mit den Randbedingungen $v_R \approx 0$ und $v_R > 0$ gesondert behandelt.

2 A. Trägervernichtung nur durch Wandrekombination (keine „Reflexion“ an der Wand)

Die Randbedingung für die Rohrwand lautet:

$$v_R(\varrho_0, \gamma) = 0, \quad \varrho_0(\gamma) = R\sqrt{\eta/D}, \quad \gamma \geq 0. \quad (23 \text{ A})$$

Im SCHOTTKY-Fall ist $\gamma = 0$ und die mittlere Lebensdauer der Träger zwischen zwei einfachen Ionisierungen

$$\tau_0 = R^2/D_0 \varrho_{00}^2 \quad \text{mit} \quad \varrho_{00} = 2,405. \quad (23 \text{ a})$$

Für $\gamma > 0$ wird $\varrho_0 < \varrho_{00}$ und es folgt

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{D_0}{D(\gamma)} \frac{(2,4)^2}{\varrho_0^2(\gamma)}. \quad (24)$$

$D(\gamma)$ ist bestimmt durch die Elektronen-Temperatur, von der auch γ abhängt. Bezieht man alles auf glei-

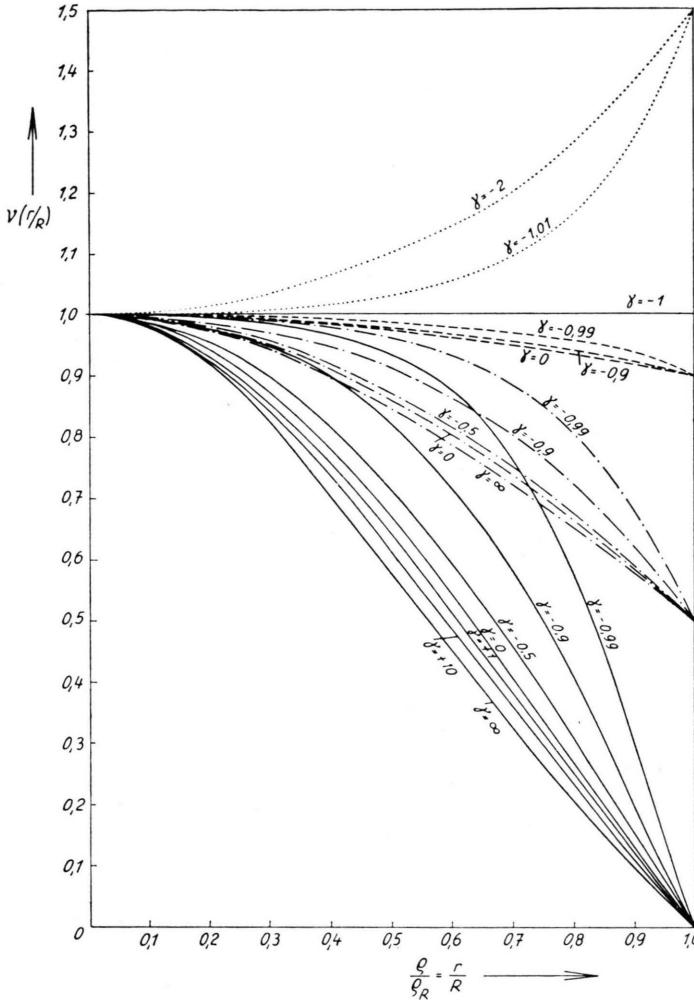


Abb. 2. Berechnete Dichteveerstellungen in reduzierter Form $v(r/R)$ mit verschiedenen γ - und Randwerten. Für $v_R=0$ entspricht $\gamma=0$ dem SCHOTTKYSCHEN Fall, die Kurve $\gamma=\infty$ ist der Arbeit von SPENKE entnommen.

ches T_- , so wird $D_0/D(\gamma)=1$ und nach SPENKE kann ein variables R_S als Radius einer „äquivalenten SCHOTTKY-Säule“ definiert werden. Für $\gamma>0$ wird $R_S>R$, für $\gamma<0$ muß $R_S<R$ sein.

Der für $D_0/D_\gamma=1$ berechnete Verlauf von $\tau/\tau_0(\gamma)$ stimmt im Bereich $-0,2 \leq \gamma \leq 10$ mit der SPENKE-schen Näherung

$$\tau/\tau_0 = 1 + 0,724 \gamma \quad (24 \text{ a})$$

überein.

Für die Wand(Loch)-Stromdichte gilt nach wie vor der Ansatz

$$j_a = -e D \left(\frac{dn}{dr} \right)_R. \quad (1)$$

Der Übergang von n auf $v(\varrho)$ liefert

$$j_a = -e D \frac{N \varrho_0^3(\gamma)}{2 \pi R^3 \int_0^\varrho \varrho v(\varrho) d\varrho} \left(\frac{dn}{d\varrho} \right)_{\varrho_0}.$$

Man erhält daraus weiter

$$j_a = \frac{ID}{\pi u_- R^3} \Phi_0(\gamma) \quad (25)$$

mit

$$\Phi_0(\gamma) = -\frac{\pi e u_- R^3}{I} \left(\frac{dn}{dr} \right)_R = -\frac{\sum_0^\infty 2\mu c_{2\mu} \varrho_0^{2\mu}}{\sum_0^\infty 1+\mu \varrho_0^{2\mu}}. \quad (25 \text{ a})$$

$\Phi_0(\gamma)$ stellt also ein dimensionsloses Maß für den Dichtegradienten an der Stelle R dar, welches den Einfluß von T_- (Stufenprozesse und VR) auf diesen enthält.

$\Phi_0(0)$ hat den Wert $(2,4)^2/2 = 2,89$. Damit geht (25) über in (7). Wenn $|\gamma|$ nur wenig von Null verschieden ist, gilt $D(\gamma) \approx D_0$, da T_- den Wert der einfachen AD-Theorie behält, solange SP und VR sich gegenseitig in ihrer Wirkung auf T_- nahezu aufheben, und es bleibt $j_a \sim I$.

In Abb. 3 ist die Funktion $\Phi_0(\gamma)$ wiedergegeben durch die Schnittpunkte der Kurven $\Phi(\gamma, v_R)$ mit der Ordinate. Die Randbedingung $v_R \approx 0$ hat aber für $\gamma < 0$ kaum reale physikalische Bedeutung.

2B. Volumen-Rekombination im Plasma und ambipolare Reflexion an der Wand (Sekundärelektronen-Emission SE)

Randbedingung: $v_R > 0$, γ beliebig. Bekanntlich resultiert mit der SCHOTTKYSCHEN Randbedingung $v_R = 0$ aus der BOLTZMANN-Verteilung

$$U_R = -\frac{k T_-}{e} \ln v_R \quad (26)$$

eine unendliche hohe Potentialdifferenz Achse – Wand.

Der Randwert v_R stellt auf Grund von (26) eine Größe dar, die durch Messung von U_R und T_- experimentell bestimbar ist. Einige berechnete Verteilungen $v(\varrho, \gamma)$ bei fest angenommenen Randwerten v_R sind bereits in Abb. 2 wiedergegeben, an denen zu ersehen ist, daß bei endlichem v_R der

Unterschied der Dichte-Verteilungen $\nu(\gamma)$ geringer wird als mit $\nu_R = 0$.

Der ambipolare Diffusionsstrom auf die Wand beträgt im Falle der Randbedingung $\nu_R > 0$

$$j_a = \frac{I D}{\pi u_- R^3} \Phi(\gamma, \nu_R), \quad (27)$$

wobei gegenüber (25 a) jetzt

$$\Phi(\gamma, \nu_R) = - \frac{\sum_0^\infty 2\mu c_{2\mu}(\gamma) \varrho_R^{2\mu}(\gamma)}{\sum_0^\infty \frac{c_{2\mu}(\gamma)}{1+\mu} \varrho_R^{2\mu}(\gamma)} \quad (27 \text{ a})$$

eine Funktion von γ und ν_R darstellt. In Abb. 3 sind einige Beispiele $\Phi(\gamma, \nu_R)$ gezeichnet. Die Druck- bzw. T_- -Abhängigkeit von j_a ist nach (27) gegeben durch die des Produktes $[D(p)/u_-(p)] \cdot \Phi(p) \cdot j_a = 0$ resultiert folgerichtig nur für $\nu_R = \nu_0$, wobei das Verschwinden von $\Phi(\gamma, \nu_R)$ bei $\gamma < 0$ noch merklich von γ abhängt.

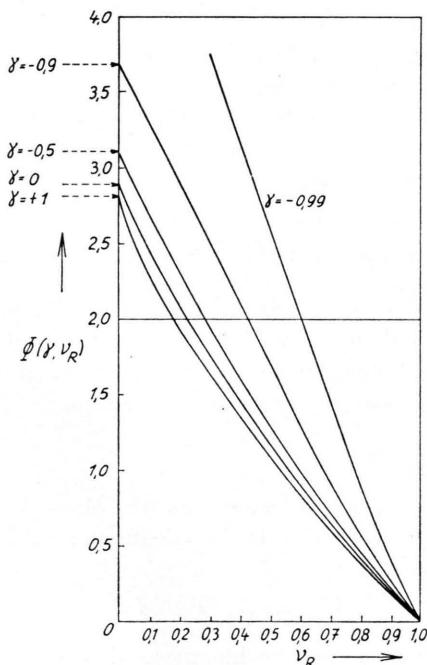


Abb. 3. Berechneter Verlauf des dimensionslosen Dichtegradienten an der Wand, $\Phi(\gamma, \nu_R)$ nach Gl. (27 a).

Für $\gamma < -1$ kehrt das Vorzeichen von Φ um, d. h. es resultiert dann ein Diffusionsstrom von der Wand gegen die Achse.

Einen zu (27) völlig äquivalenten Ausdruck für die Wandstromdichte kann man auch über eine

Integralbeziehung gewinnen. Der Wandstrom pro cm Rohrlänge muß stets gleich der gesamten Erzeugung im Volumen $\pi R^2 \cdot 1 \text{ cm}^3$ sein, wobei die VR bei der Erzeugung mitzurechnen ist. Man erhält auf diese Weise

$$j_a = \frac{e N}{2 \pi R} [\eta + (\alpha - \alpha) \tilde{n}]. \quad (28)$$

Hierin ist die mittlere Dichte \tilde{n} definiert durch

$$\tilde{n} = \frac{2 \pi \int_0^R r n^2(r) dr}{N} = n_0 \frac{\int_0^{\nu_R} \nu^2(\nu) d\nu}{\int_0^{\nu_R} \nu r(\nu) d\nu}. \quad (29)$$

Mit Hilfe von (19) läßt sich (28) umformen in

$$j_a = \frac{I \eta}{2 \pi u_- R} [1 + \gamma \tilde{\nu}], \quad \tilde{\nu} = \frac{\tilde{n}}{n_0}. \quad (30)$$

Für $\gamma = 0$ folgt aus (30) mit $\eta = D(2,4)^2/R^2$ (SCHOTTKY-Fall) sofort Gl. (7). Die Identität von (30) mit (27) ist leicht zu beweisen unter Verwendung der Potenzreihe (21) und der Rekursionsformel (22 a).

Die Größen η und γ können – zumindest im Prinzip – experimentell als Funktionen von I und p bestimmt werden. Nach Gl. (26) läßt sich der Wert von ν_R durch Messung von U_R und T_- gewinnen. Wird ferner j_a gemessen, so resultiert aus (27) der Wert von Φ und damit γ gemäß Abb. 3. Mit Hilfe von ν_R und γ läßt sich $\tilde{\nu}$ berechnen und zuletzt nach (30) die Größe η . Allerdings ist hierbei noch die Kenntnis von D und u_- erforderlich.

Bei festgehaltenem N muß eine relative Zunahme der VR eine Erhöhung von ν_R bewirken, da für $\gamma = -1$ sicher $[1 + \gamma \tilde{\nu}] = 0$ wird und (30) mit $\gamma \rightarrow -1$ monoton gegen den Wert 0 strebt. Denjenigen Trägern, die durch VR verschwinden, ist formal $u_r = 0$ zuzuordnen, woraus $\nu_R > 0$ resultiert. Physikalisch kann man sich den Fall $\gamma = -1$ in der Weise realisiert denken, daß im Plasma völlige VR besteht und an der Wand alle auftreffenden Träger wieder reflektiert werden. Im Falle $\gamma < -1$ müßte auf der Wand eine zusätzliche ambipolare Trägerquelle existieren.

Außer durch VR kann eine endliche Wanddichte noch entstehen durch Sekundärelektronen-Emission (SE) der Wand, hervorgerufen durch primär einfallende Elektronen⁸ (evtl. auch Ionen), durch $h\nu$.

⁸ Über die SE von Isolierstoffen siehe KOLLATH, Handbuch der Physik 21, 232 [1956], 1. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Strahlung und Metastabile aus dem Plasma. Experimentell könnte die SE gesteigert werden durch zusätzliche Strahlung von außen oder Bedeckung der Wand mit einer β -radioaktiven Schicht. Eine Sekundär-Emission positiver Ionen ist als unwahrscheinlich anzusehen. Die Sekundärelektronen verlassen die Wand zwar mit einer kleineren Energie als die auftreffenden Primären besitzen, werden aber durch das elektrische Feld sehr rasch auf T_- „aufgeheizt“, so daß sie praktisch dieselbe ungeordnete Geschwindigkeit \bar{v}_- haben können wie die Primären. Nach ihrem raschen „Aufheizen“ erzeugen die Sekundärelektronen vor der Wand neue Ionenpaare, von denen die Überschußelektronen wiederum zur Wand diffundieren und die durch SE entstandene $+$ -Ladung kompensieren, etwa gemäß dem Schema in Abb. 4.

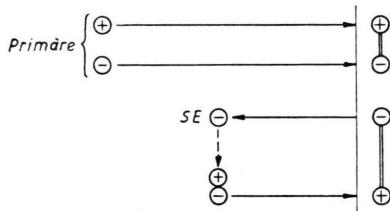


Abb. 4. Schema der SE als Modell einer „ambipolaren Reflexion“.

Auf diese Weise entsteht vor der Wand eine endliche Dichte $n(R)$ unter Einhaltung der Quasineutralität und mit $j_- = j_+$. Die SE dürfte vor allem bei $\alpha = 0$ für das Bestehen einer endlichen Wanddichte mit verantwortlich sein.

Zur experimentellen Bestimmung von ν_R wird man die Potentialdifferenz U_R am einfachsten mittels statischer Sonden messen. In der Achse besitzen auch die Ionen ungeordnete Bewegung, in Wandnähe aber vorwiegend gerichtete Geschwindigkeiten⁹. Dies bedeutet eine Fehlermöglichkeit bei der Messung von U_R , da die „LANGMUIR-Schicht“ vor der Sondenfläche sich etwas verschieden einstellen kann je nach Bewegungsart der Ionen¹⁰. Der Fehler sollte jedoch klein bleiben, solange für die Dicke d der LANGMUIR-Schicht die Bedingung $R \gg d > \lambda$ erfüllt ist, wobei d in der Achse etwas verschieden sein kann von d an der Wand. ν_R bzw. $n(R)$ ist demnach definiert in einem gewissen Abstand vor

⁹ H. FETZ, Ann. Phys., Lpz. (5) **40**, 579 [1941].

¹⁰ R. L. F. BOYD, Proc. Roy. Soc., Lond. A **201**, 329 [1950]; Nature, Lond. **165**, 228 [1950].

der Wand, der klein gegen den Rohrradius sein muß und bis zu dem hin – von der Achse aus gesehen – die Quasineutralität erfüllt bleibt. Welchen Wert diese Rand-Dichte praktisch annimmt, hängt von mehreren Faktoren ab wie VR, Reflexion und Sondeneffekten, deren Einfluß hier nur qualitativ diskutiert werden kann. Für den Wandstrom sollte aber aus kinetischen Gründen stets die oben definierte Größe ν_R maßgebend sein.

Neuere Messungen an Edelgasen¹¹ zeigen, daß dort b^+ von E/p abhängt gemäß $b_E^+ = b_0^+ [1 + a(E/p)]^{-1/2}$ (b_0^+ und a : Konstanten). Bei starken Radialfeldern E_r in Wandnähe (kleines ν_R) darf darnach streng genommen nicht mehr mit konstanter Beweglichkeit gerechnet werden. FROST¹² hat kürzlich den Einfluß dieses Effektes auf die AD theoretisch behandelt für die Randbedingung $\nu_R \approx 0$. Er findet, daß die Diffusionsrate bis um den Faktor $1/3$ oder $1/4$ kleiner werden kann gegenüber dem Ansatz mit $b_0^+ = \text{const}$ und gibt auch die zugehörige Trägerdichteverteilung an. Der Einfluß der beim Übergang zu freier Diffusion wesentlich werdenden Raumladungsschichten, die von ALLIS und ROSE¹³ theoretisch eingehend untersucht worden sind, ist in den Rechnungen von FROST ebenso wie bei uns noch nicht berücksichtigt.

3. Effusion verschiedener positiver Ionen

Für eine einzige Ionensorte ist die Wandstromdichte gegeben durch (27) oder (30). Sind dagegen mehrere Ionenarten vorhanden, so gelten diese Beziehungen nur für den Elektronenstrom.

a) Isotope Ionen

Bei Isotopen mit kleiner relativer Massendifferenz $\Delta M/M$ sollte für jede Randbedingungen an der Wand gelten:

$$\lambda_i^+ \approx \lambda_k^+, \quad T_i^+ = T_k^+, \quad (31)$$

bzw. gleiche kinetische Energie und daher

$$\gamma_i = \gamma_k.$$

Isotope Ionen besitzen darnach ähnliche Dichteverteilung. Dies folgt auch aus der Annahme

$$D_i \sim 1/\sqrt{M_i}, \quad \tau_i \sim \sqrt{M_i}, \quad \text{d. h. } \varrho_{Ri} = \varrho_{Rk}.$$

¹¹ J. A. HORNBECK, Phys. Rev. **84**, 615 [1951]. — M. A. BOND u. L. M. CHANIN, Phys. Rev. **94**, 910 [1954].

¹² L. S. FROST, Phys. Rev. **105**, 354 [1957].

¹³ W. P. ALLIS u. D. J. ROSE, Phys. Rev. **93**, 84 [1954].

Für jede Randbedingung $\nu_R \geq 0$, $\gamma = \text{const}$ folgt aus (27) wegen $\Phi_i = \Phi_k$ für das Verhältnis zweier Ionenkonzentrationen wie in 1, Gln. (11) bzw. (12),

$$\frac{N_i^+}{N_k^+} = \frac{j_i b_k^+}{j_k b_i^+} = \frac{j_i}{j_k} \sqrt{\frac{M_i}{M_k}}, \quad \text{wenn } b_+ \sim 1/\sqrt{M}. \quad (32)$$

Die Beziehung (32) sollte auch dann gelten, wenn hohes ν_R besteht infolge starker Reflexion der Träger an der Wand (SE) und die Annahme zutrifft, daß die auf die Lochfläche auftreffenden Träger nicht reflektiert werden, sondern etwa gemäß $\pi a^2 [n(R) \bar{v}/4]$ effundieren. Für eine Klärung des Reflexionsmechanismus wäre eine genaue Prüfung, ob die Effusionsströme in allen Fällen exakt ambipolar sind, sicher aufschlußreich.

Gl. (32) besagt, daß massenspektrometrische Isotopenanalysen bei beliebigem a/λ ausgewertet werden können, soweit die Voraussetzungen (31) gelten. Die Beziehung (12) behält demnach für Isotope auch bei starker VR ihre Gültigkeit. Der Grund hierfür liegt darin, daß sowohl bei idealer AD wie bei starker VR im Plasma ein *stationäres Gleichgewicht* zwischen Trägererzeugung und -vernichtung besteht, welches den Wand(Effusions-)strom bestimmt.

Die Behauptung, daß bei Isotopen keine „gas-kinetische“ Massenseparation durch die ideale Lochblende eintritt, läßt sich experimentell prüfen, indem bei konstant gehaltener Entladung einmal mit „molekularer ($2a \ll \lambda$)“, zum andern mit „laminarer ($2a \gg \lambda$)“ Öffnung gemessen wird.

b) Nichtisotope Ionen

Im Falle verschiedener nichtisotoper Ionenarten entfallen zunächst die Voraussetzungen (31). Grundsätzlich kann man hierbei aus massenspektrometrischen Messungen der Effusionsströme nur dann auf die örtlichen Ionenkonzentrationen in einem Plasma schließen, wenn sichergestellt ist, daß alle positiven Ionen annähernd gleiche Dichteverteilungen über den Querschnitt besitzen. Andernfalls muß im Prinzip mit örtlich veränderlichen Konzentrationsverhältnissen gerechnet werden und es läßt sich das meßbare Verhältnis zweier Ionenströme nur angeben zu

$$\frac{j_i}{j_k} = \frac{b_i^+}{b_k^+} \frac{N_i}{N_k} \frac{\Phi_i}{\Phi_k} = \frac{N_i \eta_i [1 + \gamma_i \tilde{v}_i]}{N_k \eta_k [1 + \gamma_k \nu_k]}. \quad (33)$$

Bei nichtisotopen Ionen empfiehlt es sich daher, λ so groß zu wählen, daß die VR sicher neben der

AD zu vernachlässigen ist, d. h. bei möglichst kleinen Drucken und Rohrweiten zu arbeiten.

Die Verteilung einer relativ gering vorhandenen Ionenart kann jedoch im Rahmen der Quasineutralität bereits von der häufigen Ionen abweichen. Massenspektrometrische Messungen an nichtisotopen Ionen sind mit der Unsicherheit der Beweglichkeitswerte und der Gleichverteilung behaftet. Die gemessenen Ionenströme sind dann nur – entsprechend Gl. (28) – proportional den Bildungsgeschwindigkeiten anzusetzen, wobei in die letzteren die VR und ggf. noch eine Instabilität der Ionen mit eingehen.

4. Effekte an der Lochblende

Es seien zuletzt noch einige Effekte an der Lochblende diskutiert, die Abweichungen vom theoretischen Betrag der Effusionsströme verursachen können:

a) Rekombination an der Wand einer nichtidealen Lochblende („kurze Röhre“)

Wenn die Blendenwand endliche Dicke aufweist, ist mit einem Trägerverlust zu rechnen, der beim Fehlen des elektrischen Längsfeldes in der kurzen Röhre (abgehackter Feldverlauf bei $r=R$) nicht durch Neubildung gedeckt wird. Man muß dann unterscheiden:

a) *Molekulare Strömung* ($\lambda \gg 2a$). Unter der Annahme, daß alle Träger isotrop einfallen und davon nur frei durch die „kurze Röhre“ fliegende dieselbe passieren können, d. h. daß auch jeder Wandstoß in der Röhre zur Rekombination führt, findet man leicht eine Abnahme des Effusionsstromes um einen Faktor

$$K' = [1 - (l/\sqrt{4a^2 + l^2})] \quad (34)$$

(l : Länge der kurzen Röhre)

ohne zusätzliche Massenseparation.

Bei vollständiger „Cosinus-Reflexion“ der Träger an der Rohrwand wäre mit dem „CLAUSING-Faktor“ für die kurze Röhre $K(l/a)$ zu rechnen. Für $l=2a$ ist z. B. bereits $K' \approx 0,3$ und $K=0,51$. Da der Strömungsleitwert der Röhre proportional \bar{v} ist, also dieselbe Massenabhängigkeit besitzt wie D im Plasma, folgt auch für Cosinus-Reflexion keine Massenseparation gegenüber Gl. (12).

Die Annahme isotropen Einfalls aller Träger auf die Blendenöffnung ist jedoch bei kleinem ν_R sicher nicht gerechtfertigt, da die Ionen vor der Wand vorwiegend gerichtete Geschwindigkeiten besitzen⁹. Be-

trachtet man dementsprechend den Ionenstrom als parallelen Strahl durch die Röhre, während die Elektronen vorwiegend ungeordnet fliegen, so wird eine negative Wandladung entstehen, die die Ionen teilweise aus dem Strahl abzieht und zur Wandrekombination führt. Der Betrag, um den hierdurch der Effusionsstrom geschwächt wird, läßt sich zwar nicht sicher angeben, wenn jedoch die gerichteten Ionen im Radialfeld der positiven Säule alle nahezu gleiche Energie erlangt haben, so werden alle einzelnen j_i um denselben Bruchteil verringert, d. h. auch bei gerichtetem Ionenstrom sollte in der kurzen Röhre keine Massenseparation auftreten. Für Isotope dürfte dieser Schluß gelten. Bei nichtisotopen Ionen können jedoch wegen $\lambda_i^+ \neq \lambda_k^+$ bereits merkliche Energieunterschiede entstehen, die wiederum zu einer Massenseparation in der kurzen Röhre führen.

β) Laminare Strömung. Strömen Neutralgas und Träger laminar durch eine kurze Röhre, so muß in jedem Fall eine massenabhängige Trägerdiffusion zur Rohrwand hin bestehen, die bewirkt, daß die Ionenstromverhältnisse auf dem Wege durch die Röhre sich ändern gegenüber der Einströmung. Eine laminare Strömung durch kurze Rohre sollte man deshalb möglichst vermeiden und nur mit molekularer, $\lambda \gg 2a$, arbeiten.

b) Elektrische Linsenwirkung an der Blende

Falls an der Wand des Entladungsrohres eine hohe Trägerdichte besteht, ist auch bei idealer Loch-

blende der Betrag des totalen Effusionsstromes noch von den Feldverhältnissen bei der Blende abhängig. Nach BOYD¹⁰ ist die Ausbildung der LANGMUIR-Schicht mit einer Änderung der Ionen-Energieverteilung verbunden, die bewirkt, daß der Ionen-Sättigungsstrom nicht beim Nullpotential einer Sonde erreicht wird, sondern erst bei stärker negativem Potential. Möglicherweise existiert also vor der isolierenden Wand keine voll ausgebildete LANGMUIR-Schicht von einer Dicke $d \gg 2a$ und daher ein elektrisches Linsenfeld an der Blende, das auf positive Ionen zerstreuend wirkt und die Verluste in der kurzen Röhre erhöht, jedoch ohne Massenseparation für alle Ionen mit gleicher Energieverteilung.

c) Abweichungen von der Zylindersymmetrie der Entladung

Die Blende sollte in der Wand eines geraden Entladungsrohres angebracht sein, wie bei den Rechnungen stets vorausgesetzt. Bei Verwendung einer metallischen Blende ist schwer sicherzustellen, daß diese dasselbe Potential wie die Glaswand hat. Wird eine starke „Ionen-Ziehspannung“ benutzt, so sind Abweichungen von der Zylindersymmetrie der Entladung zu erwarten im Gegensatz zur Glasblende.

d) Volumen-Rekombination

Volumen-Rekombination in und hinter der kurzen Röhre kann bei zu hohen Stromdichten eine Massenseparation nichtisotoper Ionen hervorrufen.